**Paper Reading for Triangle Count**

# P1

New Streaming Algorithms for Counting Triangles in Graphs

**Abstract**

我们提供了三种近似计算triangle count的streaming algorithm。和先前的算法相似，算法的空间复杂度和三角形的数目成正比关系，对于某些类型的图数据，这个空间复杂度会降低。我们也提供了一个基于triangle数量的下界，这意味着我们的第一个算法在常量度的情况下有优化。

**1. Introduction**

在这篇文章中，我们展示了如何在大量的图数据中，流式计算图中三角形的数目。换句话说，设图，是一个有n个顶点，m条边，t个三角形的无向图。我们的着眼点是希望能够找到一个亚线性的空间复杂度的算法来近似计算图中t的数目，而图中的边是作为流来引入的。所谓的亚线性空间利用率，是指我们可以使用的空间，所谓的边流，是指图的边可以是以任何顺序组成的边的序列。为了达到空间利用率，我们严格要求算法只需要

在流上扫描一遍，而且每条边在O(m)的处理时间。

Bar-Yossef et al在文章中说明了所有的列举出triangle的算法，如果要达到置信度为99/100，则至少需要的空间。这说明了针对近似算法有一个的下界，但是Bar-Yossef et al也说明了针对带有大量triangle的图，空间复杂度逼近亚线性是有可能的。换句话说，我们假设表示带有i条边组成的子图的数目，显然有.

**Our Contribution.** 这里作者简单介绍了自己三种算法的复杂度。

**Related Work. 文献2和文献7**给出了在流式模型下的某些图计算的复杂度的下界。现在也有很多人在诸如最短路径、权重最大化等不同图算法上进行研究。

**[文献2]** N. Alon, Y. Matias, M. Szegedy. The space complexity of approximating the frequency moments. STOC 96.

**[文献3]** Bar-Yossef, R. Kumar, S. Sivakumar. Reduction in streaming algorithms with an application of counting triangles in graphs. SODA 2002.

**[文献7]** M. R. Henzinger, P. Raghavan, and S. Rajagopalan, Computing on data streams, Technical Report 1998-001, DEC Systems Research Center .1998.

**2. Algorithms**

首先，我们定义一系列的符号。对于一个无向图，假设n为顶点数目，m为边的数目，d为节点最大的度。是G的有若干个顶点构成的元组的集合。我们将分成四个部分：,其中是包含i条边的元组构成的子图，设。对于,假设是长度为j的图G中的环。

**2.1 One-pass algorithms**

这里的思路是我们设计一个随机变量X，使得其期望为恰好为。那么接下来的问题是如何设计该随机变量使得空间使用最少。

首先我们将展示由文献2提到的两种算法。我们定义一个随机变量X使得E(X) = 。通过利用适量数目的随机变量X的实例，利用切比雪夫不等式，我们就能够有效的减少差异。我们能够在误差至多为的下估计的值。因此，算法的空间使用情况依赖于X的方差和计算计算随机变量X所需的空间。

**First Estimator.** 这随机变量X的计算过程如下。**随机均匀**的从流中选取一条边,统计流中顶点和的公共近邻的数量，假设其数量为c。我们定义。

现在我们来计算变量X的期望和方差，假设我们要求的triangle有一个顺序，针对第i个triangle，我们定义如下指示器：



根据上面的定义，，在根据期望的线性特质，于是有

# P2

Counting and Sampling Triangles from a Graph Stream

**Abstract**

这篇文章呈现了一个新的高效空间利用率的计算和抽样triangle的算法。

**附（文献阅读）：**

P1

Tangwongsan K, Pavan A, Tirthapura S. Parallel triangle counting in massive streaming graphs[C]//Proceedings of the 22nd ACM international conference on Information & Knowledge Management. ACM, 2013: 781-786.

**Parallel Triangle Counting in Massive Streaming Graphs**

**Abstract**

图的triangle count在复杂网络分析、链接标签和推荐等多个领域都是非常基础重要的度量。在这些应用中，图变得越来越大，而且动态变化。这篇文章陈述了一个快速的并行的在大体量的无向图中估计triangle count的方法，而这个大体量的无向图的边像流一样动态流过的。我们的算法被设计成多核共享内存的形式，充分利用并行和多级内存的优势。我们提供了理论上的边界和精确度，我们的实验时运行在真实数据集上的，结果表明我们的实验结果是精确的，并且和一个优化了的序列算法相比，我们的算法在速度上有显著提高。

**1. Introduction**

经过调研，我们发现如下论文[1, 14, 6, 20, 15, 23, 13]致力于解决graph体量足够大以至于无法一次性放进内存的流式处理算法；但是他们却无法搞笑的利用并行计算的优势，性能上有待提高。另外一方面，有[26, 9]论文致力于快速的处理大体量的静态数据，但是他们无法高效的处理动态数据。考虑到现在的数据不经体量巨大，而且经常动态变化，现存的算法无法充分利用并行优势，兼顾高效的处理大体量的图。

在这片文章中，我们设置一个快速的共享内存的并行算法，能够充分结合流式算法和并行算法的优势。这个算法提供一个可调的错误率参数：given 0 < ε, δ ≤ 1, a random variable Xˆ is an (ε, δ)-approximation of the true quantity X if |Xˆ − X| ≤ εX with probability at least 1 − δ.

**1.1 Our Contributions**

介绍了我们的工作：设计并实现了一个协调的小批量的并行算法。说出这个算法的优势和特点。

**1.2 Related Work**

在这里详细列举了目前关于Triangle Count的各种研究，介绍的非常细致。需要的相关资料都可以在这里找。

**2. Preliminaries**

**P2**

Chu S, Cheng J. Triangle listing in massive networks and its applications[C]//Proceedings of the 17th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. ACM, 2011: 672-680.

**Triangle listing in massive networks and its applications**

**Abstract**

Triangle Listing 是一些诸如复杂网络、聚集系数等图运算中的基本方法。现有的Triangle Listing算法主要是基于内存的方法（即数据全部载入到内存之后再进行运算），这种方式显然不能够支撑今天大体量的不断增长的网络模型。当图的体量远远大于内存的容量时，Triangle Listing的计算就需要外存的支撑，而这又会显著正价IO的开销。一些流式计算和抽样的算法虽然能够解决内存不够用的问题，但是他们是近似的算法，也无法得到确定的解。我们提出了一种基于IO的高效的算法来计算Triangle Listing。我们的计算结果是准确的，而且有效避免了磁盘的使用。我们的实验结果表明我们的算法是可扩展的，而且比最先进的local triangle estimation算法要好。

**1. Introduction**

我们的目标是在一个无向图G中，列举出其所有的不重复的三角形。我们希望设计一种高效的算法来针对大体量而内存有限的图数据。

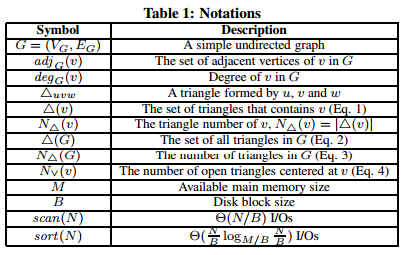
中间一段是分析现有的算法的不足。略。

我们的算法是采用迭代的方式，将原来输入进来的图G不断分割成一个个子图，使得该子图能够放入到内存中进行处理和计算Triangle List。为了确保根据本地子图而计算得到的结果的准确性和完整性，我们将Triangle分成三种类型。我们设计出一种机制，她能够列举出所有的Type1和Type2类型的triangle,然后在下一次的迭代过程中，通过一个新的分片，将Tpye3类型的triangle转换成Type1和Type2类型。为了限制总的迭代次数，我们将在每次迭代结束后，移除掉每个子图中的所有边，以此方式不断的缩小图G直至它变成空的。我们给出了两个高效的图分片算法。

我们在大量的真实数据集中测试我们的算法。该数据集有1亿（106million）多个点，18亿（1,877million）多条边，同时我们将和最好的内存算法以及近似算法进行比较。当数据能够全部载入内存时，我们的算法和内存算法拥有相似的计算性能，但是针对大体量的无法全部载入内存的图数据，近似算法的错误率在95%-133%之间，而我们的算法是精确的，在内存和时间上却相当接近。当我们希望降低算法的错误率例如降低到50%时，近似算法的运行速度已经和我们的精确算法有数量级的差异。

**2. Notations and Problem Definition**

相关术语和定义如下：

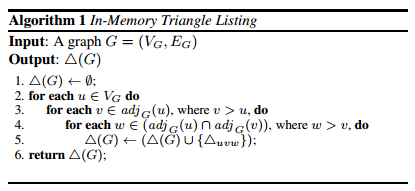


一个以v为中心的开放三角形的数目为：



直观来看，这个数目是顶点v能够形成的最多的封闭三角形的数目。

**3. In-Memory Triangle Listing**



上面这种算法和最优的内存算法相似，只不过**最优的内存算法先对顶点按照degree进行从小到大排序**，然后再进行计算。

**4. I/O-EFFICIENT TRIANGLE LISTING**

在本章节，我们将首先描述整个算法框架，然后在深入到细节。

**4.1 Algorithm Framework**

当无法将整个图导入到内存的时候，我们一次只能导入图的一部分（子图）进入内存。我们的算法就是迭代的在这样的子图上计算triangle listing.算法框架如下：

**在每一轮的迭代中：**

1. 将图G进行分割 P = {G1, . . . , Gi, . . . , Gp}, 使得得到的每个子图都能载入内存；

2. 将每个子图Gi载入到内存之中，并且计算它的triangle listing；

3. 将Gi从图G中移除掉，因为在以后的triangle listing计算中将不再起作用。

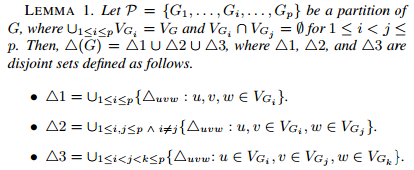
重复上面的迭代过程，直至整个图G为空。

我们的算法的主要思想就是采用迭代划分的方式不断的切割原图，然后在每个子图上独立的计算Triangle listing，以避免随机访问任意顶点及其邻接点。

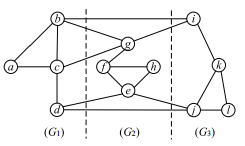
这个思想是非常简单的，但是中间有若干的挑战：（1）如何从每次的本地迭代中，确保最终结果的正确性和完整性；（2）一个高效的Triangle listing划分算法；（3）确定整体IO复杂度的边界（例如每一步的迭代中IO的复杂度以及迭代次数等）。下面我们将在每个小节中详细讨论上述问题。

**4.2 Correctness and Global-Completeness of Local Triangle Listing**

我们的算法基于如下定理：

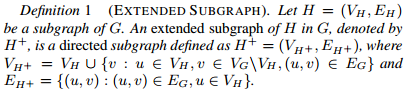


此时，我们将triangle △1, △2和△3分别称为Type 1,Type 2,Type 3这三类三角形。如下图所示：



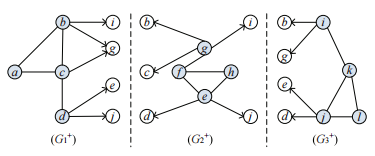
根据定理1，一个三角形△uvw可以通过搜索任意的子图Gi, 并且仅当uvw在子图Gi中时能够被找到（即Type1 类型的triangle）。然而这类的triangle数量有限，更关键的是我们不能移除掉任何边以及顶点即使我们已经列举出所有的Type1类型的三角形，因为一条边 (u, v) 极可能组成△uvw，也可能组成△uvx，而x在其他的子图中。

为了确保在列举完所有的三角形之后，能够安全的删除这些边而不会影响最终结果的完整性，我们引入扩展子图的概念（**extended subgraph**）。

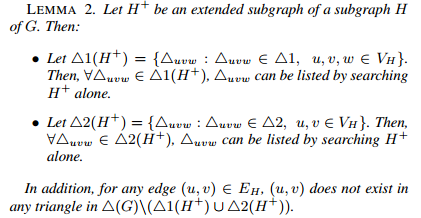


例子如下：上面分割得到的G1，G2，G3的子图的扩展子图表示如下：

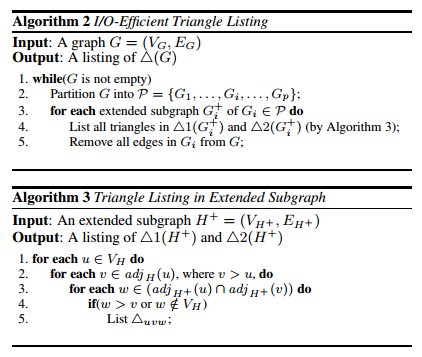
深颜色的顶点是原来子图的顶点，有向的边及其指向的顶点是Gi的扩展。



根据上面的定义1，我们又有如下的针对扩展子图的定理：



因此，我们可以采用如下的算法来统计这两类的三角形的数目：



在上述的算法中，只能够列举出第一类和第二类的triangle的数目，但是仍然缺少对第三类triangle的枚举。我们设计了一个高效的算法，它能够将第三类的triangle转换成第一类和第二类的triangle以使得所有的三角形都能够被列举出来，与此同时还能够显著减少IO开销。

P3

**Graph Twiddling in a MapReduce World**

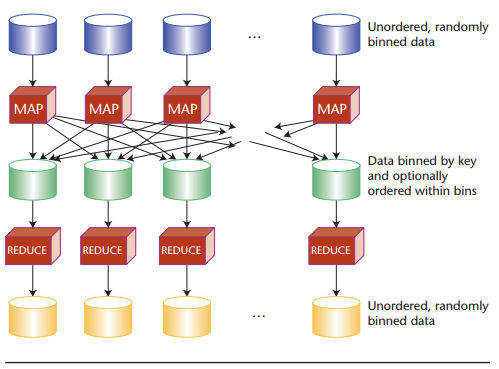
这篇文章首先讲述了如何将一个图的操作分解成一系列的MapReduce操作。这样的分解可以使得图算法能够运行在Cloud, Streaming或者单机环境下。

在多数情况下，我的MapReduce方法并不直接实现现有的graph算法，与之相反，他们抛弃的现有的算法，并且寻找能够产生相同输出新的规程。像我一样，很多人都会发现这样的规程其实是将一个问题分解成一系列的排序操作（而不是图的遍历操作），这一开始是一个障碍，但最后却发现非常有意义。

**The MapReduce Construct**

**The Process**

map和reduce操作都是非常普通的。他们接收一系列的记录（record），并且每条记录产生一个或多个输出，一条记录是由键值对组成的。一个简单的MapReduce Job如下所示：

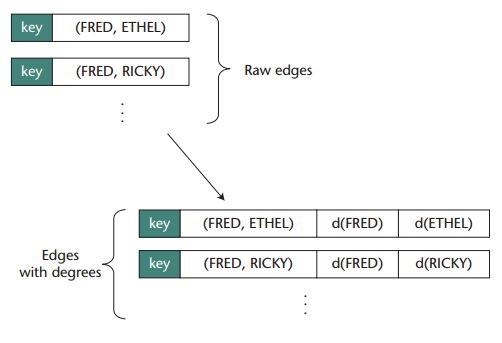


**Environmental Assumptions（环境假设）**

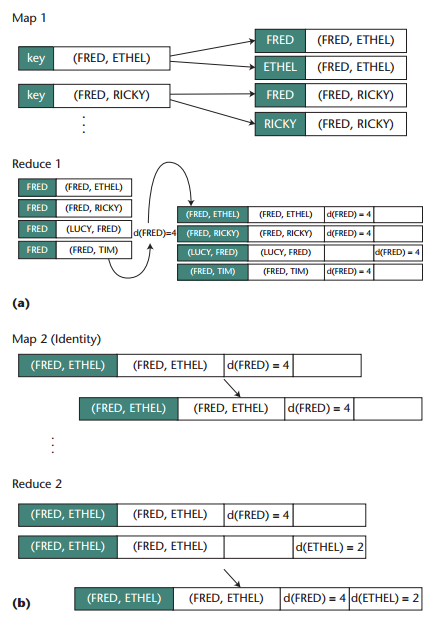
尽管用户可以在单机上使用MapReduce，但不得不说的是MapReduce计算框架是为分布式的云平台计算环境而设计的。MapReduce给并行计算带来的简化是只有当创建和访问文件的时候，才需要进行同步。Hadoop，一个用Java实现的MapReduce框架，能够在各自独立的机器中运行mapper和reducer实例。

Graph Algorithms

**An Example: Augmenting Edges with Degrees（给边增加节点的度）**



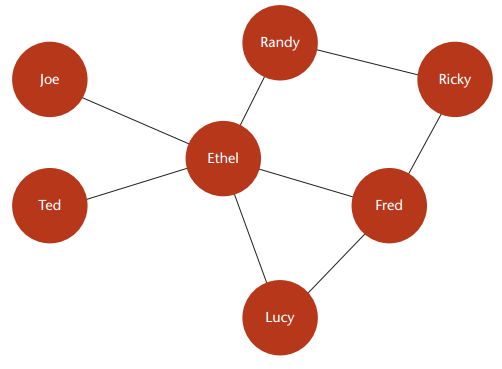
如上图所示，我们希望能够给每条边增加两个标注来分别表示源点和目标点的度。具体的实施过程如下图所示：



在第一次的Map-Reduce过程中，先将原来的每条边(key,(Fred, Ethel))map成两个元素：（Fred,(Fred, Ethel)）和（Ethel,(Fred, Ethel)）。其他的边依次内推，这样在Reduce的时候，只需要count分到同一个key中的元素数目，就可以得到这个key对应的度。于是得到若干个类似（（Fred, Ethel）,d(Fred)=4）的元素。

在第二次的Map-Reduce过程中，在map阶段，直接读取在第一阶段的Reduce结果，然后以边为key值，直接Reduce，合并源顶点和目标顶点的度，即可完成对每条边的标记。

下面是完整的示例：



上图中的每步迭代过程如下图所示：



**Simplifying the Graph**

许多图算法的首要阶段是对输入的图进行简化。即移除图中的循环以及重复出现的边。但有时候，会将边的重复的次数视为这条边连接的两个顶点之间的关联度，因此在合并相同边的时候需要考虑类似这样的问题。而且在移除相同边的时候，无向图和有向图的处理略微不同。例如针对（A,B）这条边，对于无向图来说，（B，A）就是重复的，需要将其移除；而对于有向图来说（B，A）不是重复的，需要被保留。这一小节后面的描述没有读懂，但是Flink的实现很简单。

**Enumerating Triangles**

MapReduce框架非常适合寻找Triangles。枚举所有的triangle一般可以分两步进行：第一步枚举出开放的元组（triplet）（A,B,C）满足（A，B），（A, C）是图中存在的边，那么第二步只需要验证（B, C）也是图中的边，即可构成封闭的三元组，即Triangle。注意到并不需要枚举出所有的triplet来定位triangle，其实一个triangle只需要一个triplet即可。

假设我有一个排序的顶点列表，进一步假设我记录了每条边的low-order member（这里应该是从小到大顺序，即对于边（a, b）有a<b），这样我就可以保证每个triangle都将只有一个顶点，这个顶点会收到它相关的两条边。这个顶点是这个triplet的两条边的交点，我可以选择一个顶点的顺序，我可以选择一个顶点的顺序，将所有的边根据他们最小顶点进行装箱，然后检测每个箱内的triplet是否能够被第三条边封住构成一个triangle.

这种方法的一个可能的问题是二次爆炸，其可以通过排出记录在箱中的边对而产生。为了避免这个问题，我们可以针对顶点排序设置一个巧妙的规则：根据度来排序。我根据低度优先的规则来记录每条边（low-degree member，即度数小的顶点放在前边，度数大的顶点放在后边），这样一来，度数大的顶点很少有边会分到一个箱中，因此所有的箱都不会变的很大。因此，二次方的搜索规模也不会成为问题（因为每个箱都很小）。当然，精心构造的图也会使得这种方式失效，但是大部分自然的图都不会出现这个情况。

首先根据前面两节讲述的Simplify和Degree，我们将图转换成带有顶点的度的标记的简单的无环图。在此之后，我们将进行两个MapReduce Job,如图2和图3所示。

在一个MapReduce阶段，Map的输入是上面的**Augmenting Edges with Degrees**中的输出，即带有节点的度标记的每条边作为输入，然后选择边的两个顶点中度较小的顶点作为key值，边作为value值，作为输出（如果边的两个顶点的度相同，可以选择标号较小的顶点作为key值）。在Reduce时，在每个箱中，都有一个顶点和该顶点相关联的边。（这是因为在map阶段我们是选用的顶点作为key值的）。reducer的工作就是按照某种规则，将箱中的边都组合成对边的形式：组合方式为对边所组合而成的triplet的两条边相交的顶点是该箱的key.而这条记录的key值必须是这个triplet所缺的第三条边的两个顶点组成，这样就可以在下次的mapper过程中将含有这两个顶点的边分配到一个箱中。注意到选取最小的度的顶点作为分箱是为了减少每个箱中的边的数目，从而有效的减少了边对的数目。

在第二个MapReduce阶段，这需要两个输入：一个是来自于Reduce1的结果，另一个是来自带有度标记的边集。它的工作就是量这两个记录结合起来。特别需要注意的是边集中每条边中顶点的排列规则必须和triplet中另外两个顶点的排列规则保持一致。比如都是从小到大排列。因为只有这样才能保证他们能够映射到相同的key上。当一条边和一个triplet分到同一个箱的时候，表明他们可以构成一个封闭的triangle。一般情况下，一个箱中会有至多一条边和任意数目的triplet,有多少个triplet就对应的有多少个triangle。

下面我们将以如下图来进行说明：

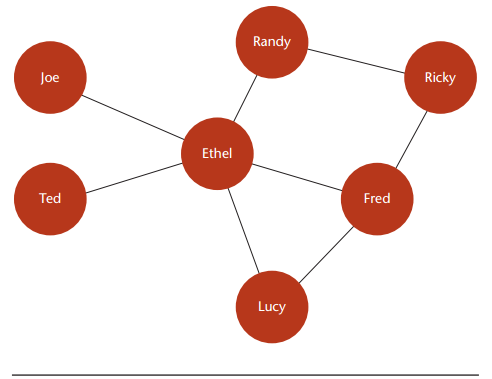


图1. 一个简单的无向图

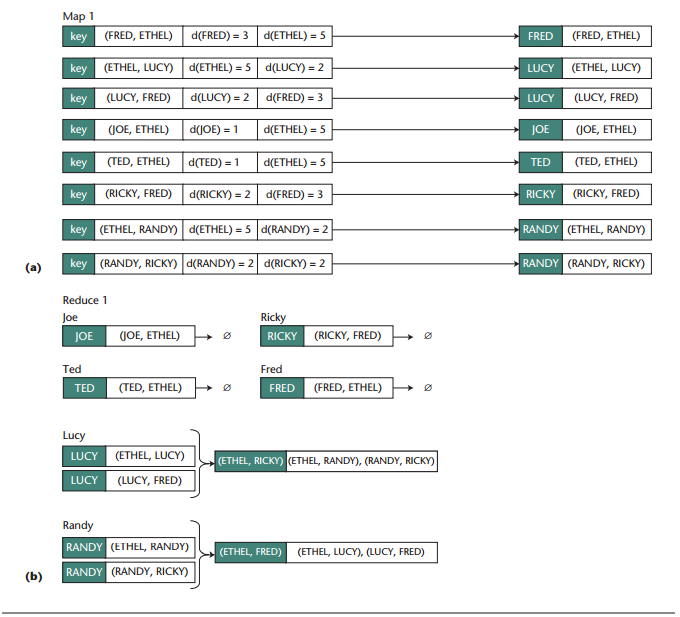


图2. Triangle Count MapReduce1

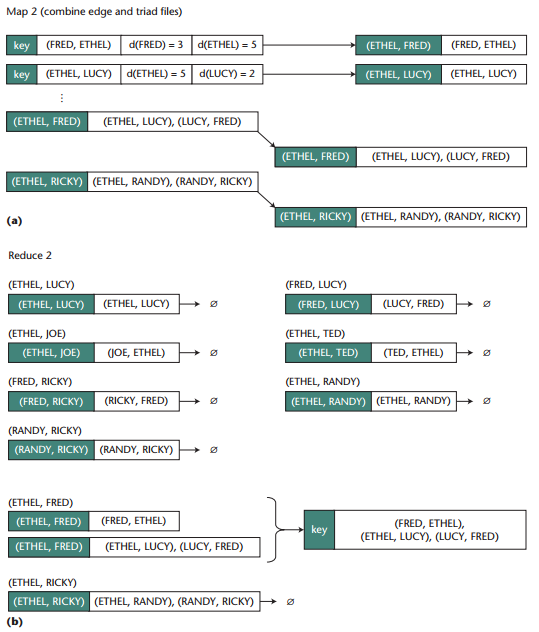


图3. Triangle Count MapReduce2

**思考1，为什么这种装箱不会漏掉解？**

等价于证明对于一个三角形的三条边，不会拆分到三个不同的箱中。

**思考2，为什么这种方式的解不会重复？**

在合并的过程中保证了一个三角形只会有一个triplet，所以不会重复。